Cálculo Diferencial e Integral C
roteiro para estudo

Yolanda K. Saito Furuya

31 de agosto de 2004

Este resumo contém os primeiros conceitos estudados nesta disciplina. Os exemplos foram estudados em sala de aula, e exercícios foram propostos em separado, nas dimensões 2 e 3. Cada conceito ou palavra não entendida deve ser esclarecida durante o estudo. Procure sua professora! Discuta com os colegas!

1 Definição de função real de várias variáveis reais

Considere $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$. Para $n = 2$, temos o plano $\mathbb{R}^2$ e para $n = 3$, o espaço $\mathbb{R}^3$.

Uma função real de n variáveis reais é uma função $f : D \to \mathbb{R}$ definida num domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ com valores na reta $\mathbb{R}$:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \stackrel{f}{\longmapsto} w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$$

Exemplo: $f : \mathbb{R}^2 \to R$ dada por $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Que obviamente preferimos escrever $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Sobre funções, lembramos que:

- Uma *função* $f : X \to Y$ associa a cada $x \in X$ uma única imagem $y = f(x) \in Y$.
- O conjunto de partida X é chamado domínio de f e o conjunto de chegada Y é o contradomínio de f.
- O conjunto de todos os y's que são imagens de algum $x \in X$ é chamado conjunto imagem de f, ou simplesmente, imagem de f:
  $Im(f) = \{y \in Y |\ y = f(x) \text{ para algum } x \in X\}$.
- Se $Im(f) = Y$, dizemos que a função f é sobrejetora. Ou seja, f é sobrejetora se para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ com $f(x) = y$.
- A função f é dita injetora, ou um-a-um, se elementos distintos de X são levados em imagens distintas por f.
  Ou seja, $x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$.
  Ou ainda, $f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$.
- Uma função real é limitada se existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para todo x no domínio.

2 Pontos interiores, pontos de fronteira, conjuntos abertos e conjuntos fechados em $\mathbb{R}^n$

Sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, para a descrição dos domínios das funções, lembramos de algumas definições geométricas e introduziremos agora alguns conceitos topológicos.

- Dados pois pontos p e q em $\mathbb{R}^n$, podemos definir uma distância entre os dois pontos, utilizando uma norma de $\mathbb{R}^n$: $d(p, q) = ||q - p||$.

- A norma mais conhecida utilizada na disciplina é a euclidiana, dada por $||(x_1, x_2, \ldots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, mas por questões computacionais, pode-se substituí-la, sem perda de propriedades, por uma das outras normas equivalentes, $||(x_1, x_2, \ldots, x_n)||_\infty = \max\{|x_i|,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ ou $||(x_1, x_2, \ldots, x_n)||_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$.

- Defina uma bola aberta de centro p e raio r, como sendo o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^n$ cuja distância ao centro é menor que r:
  $B(p, r) = \{q \in \mathbb{R}^n \mid d(p, q) < r\}$.

- O disco contém também os pontos q com $d(p, q) = r$ (pontos da esfera de raio r e centro p).

- Dado um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, um ponto q é ponto interior de D se existe um raio r de forma que a bola (ou o disco) de raio r centrado em p esteja toda contida D, isto é, todos os pontos que distam menos que r de p ainda estão em D. O conjunto de todos os pontos interiores de D é chamado de "interior"de D.

- Um ponto $q \in \mathbb{R}^n$ (não necessariamente em D) é ponto de fronteira de D se para todo raio $r > 0$, existem pontos pertencentes a D e pontos não pertencentes a D que distam menos que r de p. Ou seja, dentro de qualquer bola de centro p, existem pontos de D e de fora de D. O conjunto de todos os pontos de fronteira de D é chamado de "fronteira"de D.

- D é aberto em $\mathbb{R}^n$ se for um subconjunto cujos pontos são todos interiores, ou seja, o conjunto é igual ao seu interior. Neste caso, D não pode conter pontos de fronteira.

- D é "fechado"em $\mathbb{R}^n$ se contém todos os seus pontos de fronteira.

- D é "limitado"se existe M qual que $||p|| \leq M$ para todo ponto $p \in D$, ou seja, existe um raio M tal que o disco de centro na origem e raio M contém o conjunto. Na verdade, o centro do disco pode ser outro.

- Uma função real f é limitada se $Im(f)$ é um conjunto limitado em $\mathbb{R}$.

- Um ponto $p \in D$ é um "ponto isolado"de D se existe um raio $r > 0$, de forma que p é o único ponto de D dentro da bola de centro p e raio r. Veja que pontos interiores não são isolados. E todo ponto isolado é ponto de fronteira.

Exercício: Inventar subconjuntos do plano e no espaço e verificar se são abertos, fechados, encontrar seus pontos de fronteira, desenhar, etc. Procure estudar principalmente os domínios de funções de 2 e 3 variáveis.

3 Gráficos e curvas de nível de funções reais de duas variáveis reais

Introduzimos novos conceitos para estudarmos o comportamento de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

- Uma curva de nível de f é um subconjunto de pontos do domínio D, pontanto no plano $\mathbb{R}^2$, onde o valor de f é o mesmo. Isto é, dado $k \in \mathbb{R}$, a curva de nível k é o conjunto $C_k = \{\,(x, y) \in D \mid f(x, y) = k\,\}$.
  Em geral, é uma curva no sentido geométrico intuitivo, mas pode-se degenerar. Se $k \neq Im(f)$, sempre temos que C_k é o conjunto vazio. Mesmo quando $k \in Im(f)$, C_k pode não ser exatamente uma curva.
  Se $p \in D$, a curva de nível por p é $C_{f(p)} = \{\,(x, y) \in D \mid f(x, y) = f(p)\,\}$.
  Certamente que $C_k \cap C_{k'} = \emptyset$ se $k \neq k'$.

- O mapa de contorno de f é uma representação gráfica de D juntamente com algumas curvas de níveis diferentes. Um bom mapa de contorno deve mostrar todas as mudanças qualitativas das curvas de nível.

- No Maple, podemos obter curvas de nível e mapas de contorno utilizando o comando `contourplot`, carregado no pacote gráfico `plots`. Ex:

  ```
  with(plots):
  contourplot( x^2 - y^2, x = -2 .. 2, y = -2 .. 2, contours = [-1,0,1]);
  ```

  para obter as curvas nos níveis -1, 0 e 1. Observe que no nível 0 o conjunto obtido não é exatamente o esperado, devido a problemas computacionais do método utilizado, que não se adequa ao problema matemático enfrentado no nível 0, que poderá ser descrito futuramente com o conceito de diferenciabilidade.

- O gráfico de $f : D \to \mathbb{R}$ é o conjunto dos pontos do espaço $\mathbb{R}^3$, mais precisamente, de $D \times \mathbb{R}$, da forma $Graf(f) = \{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D \}$. Em geral é uma superfície no sentido intuitivo, dado por $z = f(x, y)$.
- No Maple, o gráfico de f pode ser obtido, quando a função e o domínio forem bem comportados, através do comando `plot3d`. Ex:

```
plot3d( x^2 - y^2, x = -2 .. 2, y = -2 .. 2);
```

  Opções podem ser utilizadas para se visualizar as curvas sobre o gráfico (curvas de contorno) que correspondem às curvas de nível. Experimente!

  Exercício 0: Relembre cônicas e quádricas na forma reduzida, no mínimo. Pratique também de como obter secções de superfícies por planos coordenados e planos paralelos os planos coordenados.

  Exercício 1: Dadas as expressões das funções, faça o mapa de contorno e seu gráfico. Para começar, utilize funções da forma $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cx + d + f$. Exercício 2: Dados possíveis gráficos de funções, esboce um mapa de contorno, sem as expressões das funções.

  Exercício 3: Dados possíveis mapas de contorno, esboce possíveis gráficos, sem as expressões das funções. Experimente curvas isotermais de uma mapa de temperatura, mapas topográficos, etc.

4 Superfícies de nível de funções reais a 3 variáveis reais

Neste tipo de função, $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, não temos o hábito de esboçar gráficos, por motivos óbvios:
o gráfico, $Graf(f) = \{ (x, y, z, f(x, y, z)) \mid (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3 \}$, é um subconjunto de $\mathbb{R}^4$.

No entanto, estudamos o comportamento de f através das chamadas superfícies de nível, cada uma constituída de pontos do domínio onde f tem o mesmo valor.

- Para $k \in \mathbb{R}$, $S_k = \{ (x, y, z) \in D \mid f(x, y) = k \}$ é a superfície de nível k de f.
  Verifica-se, como no caso de curvas de nível para funções de 2 variáveis, que se $k \notin Im(f)$, o conjunto é vazio. E também pode não ser exatamente uma superfície.
- No Maple, podemos obter superfícies de nível k, para funções e domínios bem comportados, utilizando-se o comando `implicitplot3d`. Experimente:

```
with(plots):
implicitplot3d( x^2 + y^2 - z^2 = 1, x = -2 .. 2, y = -2 .. 2, z = -2 .. 2);
```

Exercício: Explore, para começar, superfícies de nível de funções da forma $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + g$, obtenha-os no Maple, e verifique se os desenhos obtidos correspondem à realidade.

5 Limite e continuidade de funções de várias variáveis reais

Seja $f : D \subset\to \mathbb{R}$ e p um ponto de $\mathbb{R}^n$, podendo pertencer ou não a D, mas não podendo ser ponto isolado de D.

- Definição formal de limite: O limite de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ quando $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tende a p é $L \in \mathbb{R}$ se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ com $0 < d(p, (x_1, x_2, \ldots, x_n)) < \delta$ tem-se que $|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - L| < \varepsilon$. Ou seja, pontos próximos de p, são levados por f em valores próximos de L. Lembramos também que pontos próximos de p envolvem pontos em todas as direções possíveis em relação a p, ao contrário do caso de 1 variável.
- Observamos que se $\lim_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to p} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = L$, então para qualquer curva parametrizada $\alpha(t)$ de D tendendo a p quando t tende a t_0 (isto é, $\alpha(t) \in D$ e $\lim_{t\to t_0} \alpha(t) = p$), devemos ter $\lim_{t\to t_0} f(\alpha(t)) = L$ (condição necessária, mas não suficiente).

- Consequentemente, se existem dois caminhos $\alpha(t)$ e $\beta(s)$ em D tendendo a p quando t tende a t_0 e s tende a s_0, respectivamente, e tais que os limites $\lim_{t\to t_0} f(\alpha(t))$ e $\lim_{s\to s_0} f(\beta(t))$ existem e são distintos, ou algum deles não existe, então o limite da função no ponto p não existe. Este limite $\lim_{t\to t_0} f(\alpha(t))$ é chamado "limite de f quando $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tende a p ao longo de α".
- Uma função f é contínua em p, se $p \in D$ e valer $\lim_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to p} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(p)$, no caso do ponto não ser isolado.
- Cuidado com os pontos na fronteira de definição das expressões das funções! São os pontos onde há necessidade de pensar em termos de limites e questionar.
- Propriedades de limites e continuidade existentes estudados no Cálculo A e suas técnicas podem ser facilmente adaptadas para várias variáveis. Por exemplo, soma, subtração e produtos de funções contínuas é contínua, etc.
- Pontos onde f não tem limite são pontos problemáticos para utilização de qualquer software gráfico.

6 Derivadas parciais e diferenciabilidade

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto interior de D.

A derivada parcial de f em p em relação à variável x_i é a derivada da função de 1 (uma) variável obtida mantendo-se fixas as coordenadas de p exceto a i-ésima coordenada x_i.

Vamos ver como fica, no caso de duas variáveis: $z = f(x, y)$, $p = (x_0, y_0)$.

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{df_{y_0}}{dx}(x_0)$, onde f_{y_0} é definida fazendo $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ para x numa vizinhança de x_0.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(p + h(1, 0)) - f(x_0, y_0)}{||p + h(1, 0) - p)||}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{df_{x_0}}{dy}(y_0)$, onde f_{x_0} é definida fazendo $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ para y numa vizinhança de y_0.
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(p + h(0, 1)) - f(x_0, y_0)}{||p + h(0, 1) - p)||}$
- Outras notações para $\dfrac{\partial f}{\partial x}$: f_x, $D_1(f)$.
- De acordo com Cálculo A, as derivadas parciais representam coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de f nas respectivas direções.
- As derivadas parciais podem ser facilmente calculadas pelas regras de derivação estudadas em Cálculo A, exceto nos pontos de fronteira do domínio de definição das expressões.
- No Maple, pode-se utilizar `diff` e `D` para calcular, respectivamente, a expressão da derivada parcial e a função derivada. Veja o exemplo:

```
diff(x^2 +y^2, x); # resulta 2x
diff(x^2 + Y^2, y); # resulta 0 (por quê?)
f := (x,y) -> x^2 + y^2; # define a funcao f
D[1](f); # resulta na funcao derivada parcial de f em relacao a x
```

- Lembramos que as derivadas parciais no ponto podem existir, sem que a função seja contínua no ponto, como na função $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

- Derivadas parciais de ordem maior podem ser definidas utilizando-se as funções derivadas parciais:
  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx} = D[1,1](f)$,
  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy} = D[1,2](f)$,
  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx} = D[2,1](f)$
  e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy} = D[2,2](f)$,
  são as derivadas parciais de segunda ordem.

- A ordem da derivação nem sempre comuta, mas um teorema garante que se as derivadas parciais de segunda ordem existem num aberto contendo p e são contínuas em p, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)$.

- Dizemos que f é diferenciável no ponto p se além das derivadas parciais exitirem, é satisfeita a condição
  $\lim_{(x,y)\to p} \frac{f(x,y) - [f(p) + f_x(p)(x-x_0) + f_y(p)(y-y_0)]}{||(x,y) - p||} = 0$,
  que garante que o valor da função $f(x,y)$ tende ao valor na direção tangente $f(p)+f_x(p)(x-x_0)+f_y(p)(y-y_0)$ mais rapidamente que (x,y) tende a p.

- $z = f(p) + f_x(p)(x-x_0) + f_y(p)(y-y_0)$ é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$.

- f diferenciável no ponto p indica que f além de ser contínua no ponto, tem gráfico "suave"em $(p, f(p))$, com um plano tangente bem definido.

- Uma condição suficiente de diferenciabilidade é dado pelo seguinte teorema:
  "Se f tem as derivadas parciais contínuas num aberto A, então f é diferenciável em A".
  Isto evita cálculo de limites para verificar diferenciabilidade nos casos mais comuns.

- Regras da cadeia para o cálculo das derivadas parciais podem ser utilizadas quando compomos funções diferenciáveis:
  - Se $z = f(x,y)$ e $w = g(z)$, então $w_x(x,y) = g'(z)z_x(x,y)$ e $w_y(x,y) = g'(z)z_y(x,y)$.
  - Se $z = f(x,y)$, $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, então $z_u(u,v) = f_x(x,y)x_u(u,v) + f_y(x,y)y_u(u,v)$ e $z_v(u,v) = f_x(x,y)x_v(u,v) + f_y(x,y)y_v(u,v)$.
  - Se $z = f(x,y)$, $(x,y) = (x(t), y(t))$, então $z'(t) = f_x(x,y)x'(t) + f_y(x,y)y'(t)$.

- Aplicação da regra da cadeia no cálculo de mais derivadas de funções que podem ser definidas implicitamente:
  Ex:
  $y = \operatorname{arcsen}(x^2) \Longrightarrow \operatorname{sen}(y) = x^2 \Longrightarrow \cos(y)y'(x) = 2x \Longrightarrow y'(x) = \frac{2x}{\cos(y(x))}$
  $z = x^y \Longrightarrow \ln(z) = y\ln(x) \Longrightarrow \frac{z_x}{z} = \frac{y}{x} \Longrightarrow z_x = \frac{y}{x}x^y = yx^{y-1}$
  e $\frac{z_y}{z} = \ln(x) \Longrightarrow z_x = x^y \ln(x)$

7 Vetor gradiente, derivada direcional e geometria

Seja $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma função real a n variáveis reais. O vetor gradiente de f no ponto p é o vetor $\bigtriangledown f(p) = (D[1](f)(p), \ldots, D[n](f)(p))$.

- Para $n = 2$, $\bigtriangledown f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$ e para $n = 3$, $\bigtriangledown f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))$

- Dados $z = f(x,y)$, $p = (x_0, y_0)$ e $\vec{u} = (a,b)$ com $||\vec{u}|| = 1$, definimos a derivada direcional de f na direção (na verdade, direção e sentido) de $\vec{u}$ como sendo a derivada de $f(\alpha(t))$ em $t = 0$ onde $\alpha(t) = p + t\vec{u} = (x_0 + ta, y_0 + tb)$.

- Ou seja, $D_{\vec{u}}f(p) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(p+t\vec{u}) - f(p)}{t}$, é a derivada direcional de f na direção de $\vec{u}$ e representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f nessa direção.

- Pela regra da cadeia, $D_{\vec{u}}f(p) = \dfrac{d}{dt} f(\alpha(t))|_{t=t0} = f_x(p)a + f_y(p)b = \bigtriangledown f(p) \cdot \vec{u}$, onde $\cdot$ representa produto escalar. (Fórmula para calcular derivada direcional, sem limites!)

- Ainda para regra da cadeia, se $\alpha(t)$ é qualquer caminho diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \vec{u}$, então $\bigtriangledown f(p) = (f(\alpha))'(0)$. Consequentemente, se $\vec{u}$ aponta da direção tangente à curva de nível de f por p, fazendo $\alpha(t)$ parametrizar a curva de nível, temos que $\bigtriangledown f(p) \cdot \vec{u} = 0$, donde o vetor gradiente de f no ponto p é perpendicular à curva de nível de f por p.

- De $D_{\vec{u}}f(p) = \bigtriangledown f(p) \cdot \vec{u} = || \bigtriangledown f(p)|| \cos(\theta)$, onde θ é o ângulo entre $\bigtriangledown f(p)$ e $\vec{u}$, vemos que $D_{\vec{u}}f(p)$ tem valor máximo na direção e sentido do gradiente.

- Ou seja, taxa de variação de f em p é nula na direção da curva de nível e máxima na direção do gradiente.

- Geometricamente, cada vetor gradiente deve ser perpendicular à curva de nível e apontar na direção (e sentido) onde f cresce mais rapidamente.

- Se $w = f(x, y, z)$ podemos dizer que para cada p no domínio onde f é diferenciável na vizinhança, o vetor gradiente é perpendicular à superfície de nível por p e aponta para a direção de maior crescimento de f. Ou ainda, o vetor gradiente é perpendicular ao plano tangente à superfície de nível $k = f(p)$ no ponto p.

Exercício 1: Calcular equações de retas tangentes a curvas de nível e planos tangentes a superfícies de nível.
Exercício 2. Procurar aplicações de funções e direções de maior crescimento da função.
Exercício 3: Desenhe campos gradientes no Maple utilizando o comando `gradplot` juntamente com o pacote `linalg`. Acrecente o mapa de contorno e analise a função.

8 Diferenciais, valores aproximados e taxa de variação

Vamos considerar $z = f(x, y)$ e $p = (x_0, y_0)$. Pode-se generalizar para n.

- Da definição de função diferenciável em p, vimos que $f(x, y)$ é próximo de $f(p) + f_x(p)(x - x_0) + f_y(p)(y - y_0)$ para (x, y) próximo de p.
  Ou seja, indicando $x - x_0 = dx$ e $y - y_0 = dy$ nessa proximidade, temos que $f(x, y) - f(p) \approx f_x(p)\, dx + f_y(p)\, dy$.
  Indicando $df(p) = f_x(p)\, dx + f_y(p)\, dy$, temos que $\triangle z = f(x, y) - f(p) \approx df(p)$.
  Ou ainda, $f(x, y) \approx f(p) + df(p)$.

- Aplique: calcule o valor aproximado de $\cos(3) + \operatorname{sen}(0.1)$, pondo $f(x, y) = \cos(x) + \operatorname{sen}(y)$, $p = (\pi, 0)$, $dx = 0.1416$ e $dy = 0.1$.

- Aproximações de ordem superior para funcções com derivadas de ordem superior (ex para ordem N):
  $f(x, y) - f(p) \approx$

  $f_x(p)\, dx + f_y(p)\, dy + \dfrac{1}{2!}[f_{xx}(p)(dx)^2 + 2f_{xy}(p)\, dx\, dy + f_{yy}(p)(dy)^2] + \cdots +$
  $\dfrac{1}{N!}[\sum_{k=0}^{N} \dfrac{N!}{k!(N-k)!} \dfrac{\partial^N f}{\partial x^k \partial y^{N-k}} (dx)^k (dy)^{N-k}$
  Voltaremos nesta expressão após séries de funções.

- Da regra da cadeia, segue que se $z(t) = f(x(t), y(t))$ e $(x(t_0), y(t_0)) = p$, com boas condições de diferenciabilidade, então $z'(t_0) = f_x(p)x'(t_0) + f_y(p)y'(t_0)$. Isto pode ser reeditado em termos de taxa de variação. Ex: Suponha que uma pilha de areia em formato de cone está crescendo, sendo que o raio da base aumenta a $2cm/s$ e a altura, a $1.5cm/s$. Sabendo que no instante $t = 5s$ o raio era de $10cm$ e a altura de $3cm$, calcule a taxa de variação do volume no instante $t = 5s$.